

I. Zadanie „o dziesięć mniej”.

Powszechnie znana jest reklama, w której pokazuje się, że niestosowanie się do ograniczenia prędkości na jezdni może skutkować wypadkiem. Brakuje w niej jednak ważkiej (i przemawiającej do wyobraźni!) informacji: z jaką prędkością uderzy w przeszkodę (inny pojazd, pieszego, itp.) samochód, który jedzie z początkową prędkością „o dziesięć większą” od innego samochodu, któremu udało się zatrzymać tuż przed ową przeszkodą.

Ruch obu samochodów składa się z dwóch etapów: ruchu jednostajnego i ruchu jednostajnie zmiennego pod wpływem siły tarcia opon o jezdnię. Do programu przyjmuje się następujące założenia:

1. Oba samochody i obaj kierowcy są identyczne i mają jednakowe warunki na jezdni, z wyjątkiem początkowej prędkości v_0 .
2. Początkowe prędkości samochodów różnią się o Δv :

$$v_{02} = v_{01} + \Delta v.$$

3. Obaj kierowcy postrzegają przeszkodę w tej samej chwili t_0 (umownie $t_0 = 0$) i w tym samym położeniu x_0 (umownie $x_0 = 0$). Odległość s do przeszkody jest dobierana tak, że przy ustalonych warunkach i parametrach samochód (1) zdąży zatrzymać się tuż przed przeszkodą („uderzy” w nią z prędkością końcową równą zero). Samochód (2), w tych samych warunkach, uderzy więc w przeszkodę z końcową prędkością $v_2 \neq 0$.
4. Obaj kierowcy rozpoczynają hamowanie po jednakowym czasie reakcji t_r . Do momentu rozpoczęcia hamowania samochody przebywają ruchem jednostajnym, prostoliniowym drogę s_{r1} :

$$s_{r1} = v_{01} \cdot t_r$$

5. Po rozpoczęciu hamowania samochody poruszają się ruchem jednostajnie opóźnionym prostoliniowym, w którym wartość przyspieszenia a (ujemnego) wynika ze współczynnika tarcia statycznego opon o jezdnię μ , ale nie zależy od masy samochodu m :

$$|a| = \mu \cdot F_n / m = \mu \cdot m \cdot g / m = \mu \cdot g$$

6. Samochód (1) zatrzymuje się po czasie hamowania t_h , obliczanym z równania:

$$v_1(t_h) = -a \cdot t_h + v_{01} = 0$$

7. W trakcie hamowania samochód (1) przebywa drogę hamowania s_{h1} daną wzorem:

$$s_{h1} = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_h^2 + v_{01} \cdot t_h$$

8. Tak więc odległość s , zwana **całkowitą** drogą hamowania dla samochodu (1), w jakiej obaj kierowcy spostrzegli przeszkodę wynosi:

$$s = s_{r1} + s_{h1}$$

Całkowita droga hamowania s zależy od v_{01} , t_r oraz μ . Droga ta nie jest jednak **całkowitą** drogą hamowania dla samochodu (2), gdyż pojazd ten nie zatrzymał się tuż przed przeszkodą.

9. Samochód (2) uderzy w przeszkodę po przebyciu tej samej odległości s , na którą składają się droga s_{r2} przebyta (ruchem jednostajnym) w trakcie reagowania kierowcy na widok przeszkody oraz droga s_{h2} (przebyta ruchem jednostajnie opóźnionym) w trakcie hamowania. Jeżeli $s_{r2} \leq s$ (dalej zakłada się, że warunek ten jest spełniony), to:

$$s_{h2} = s - s_{r2}$$

10. Samochód (2) uderzy w przeszkodę po czasie t_u od rozpoczęcia hamowania, obliczanym z równania kwadratowego:

$$s_{h2} = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_u^2 + v_{02} \cdot t_u$$

11. Samochód (2) uderzy w przeszkodę z prędkością v_2 daną wzorem:

$$v_2 = -a \cdot t_u + v_{02}$$

Końcowa prędkość v_2 , zależna od parametrów: v_{01} , Δv , t_r oraz μ , jest właśnie wynikiem „działania” programu.

II. Rozwiązanie w arkuszu kalkulacyjnym.

Program „O dziesięć mniej” pozwala zilustrować numerycznie oraz za pomocą wykresów różne aspekty zależności całkowitej drogi hamowania oraz końcowej prędkości v_2 od czterech parametrów zagadnienia, czyli od v_{01} , Δv , t_r oraz μ . Wartości te wprowadzane są za pomocą pól kombi.

- Używane w programie wartości v_{01} odzwierciedlają przedział realnie dopuszczalnych prędkości w ruchu drogowym; jako domyślną warto przyjąć ograniczenie prędkości w ruchu miejskim (50 km/h). Warto też wyróżnić w programie następujące prędkości: 30 km/h (typowe ograniczenie na terenie osiedli mieszkaniowych), 90 km/h (dopuszczalna prędkość na typowych drogach) oraz 120 km/h i 140 km/h (dopuszczalna prędkość na drogach ekspresowych i autostradach).
- Domyślną wartością Δv jest 10 km/h, zgodnie z tytułem programu. Warto dopuścić wartości Δv od bliskich zera do nawet 100 km/h, by pokazać potencjalne skutki „piractwa drogowego”.
- Czas prostej reakcji człowieka na pojedynczy bodziec jest rzędu 0,1 - 0,2 sekundy. Kilkuczynnościowa reakcja „zdjąć nogę z gazu i wdepnąć w hamulec” trwa co najmniej 0,5 sekundy (ta wartość może pojawiać się jako domyślna) i może wydłużyć się, nawet kilkakrotnie, w związku z czynnikami takimi, jak zaabsorbowanie własnymi myślami, rozmową, równoległym wykonywaniem innych czynności (jedzenie, picie, rozmowa przez telefon), zmęczeniem czy niedyspozycją psychofizyczną (wywołaną lekami, alkoholem czy narkotykami).
- Współczynnik tarcia opon o jezdnię w optymalnych warunkach drogowych może osiągać wartość $\mu = 1$, którą można zaproponować jako domyślną. Zużyte opony czy obniżona jakość nawierzchni (np. drobne nierówności na jezdni) powodują obniżenie wartości μ o ok. 0,2 - 0,3. Mokra nawierzchnia dodatkowo sprowadza μ do okolic 0,5; jeszcze większe obniżenie μ może wynikać z obecności na jezdni warstewki wody (tzw. akwaplanacja) lub ubitej warstwy



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



mokrego śniegu. Lód na jezdni spowodza współczynnik tarcia opon o nawierzchnię do okolic $\mu = 0,1$.

Wartości ustalane za pomocą pól kombi

	A	B	C
1			
2	V01 [km/h]	30	▼
3	V01 [m/s]	8,3	
4			
5	Δv [km/h]	10	▼
6	Δv [m/s]	2,8	
7			
8	V02 [km/h]	40	
9	V02 [m/s]	11,1	
10			
11	t_r [s]	1	▼
12			
13	wsp. tarcia μ	0,8	▼
14	a [m/s ²]	7,85	

V01 [km/h] 10 - 140

Δv [km/h] 5 - 100

t_r [s] 0,1 – 2,5

μ 0,1 - 1

1. Rozwiązanie równań z założeń z pkt od I.1 do I.11.,

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Samochód 1			Droga hamowania	Samochód 2				
2	Sr1 [m]	th [s]	Sh1 [m]	S [m]	Sr2 [m]	Sh2 [m]	tu [s]	V2 [m/s]	V2 [km/h]
3	17,5	1,1	4,4	21,9	23,3	-1,4	-0,1	12,1	43,4



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\begin{aligned}
Sr1 &= v01[m/s] \cdot tr[s] & &= B3 * B11 \\
th[s] &= v01[m/s] \cdot a[m/s^2] & &= B3 * B14 \\
Sh1[m] &= -0,5 \cdot a[m/s^2] \cdot th^2[s] + v01[m/s] \cdot th[s] & &= 0,5 * B14 * F3^2 + B3 * F3 \\
S[m] &= Sr1 - Sh1 & &= E3 + G3 \\
Sr2[m] &= V02[m/s] \cdot tr[s] & &= B9 * B11 \\
Sh2[m] &= S[m] - Sr2[m] & &= H3 - I3 \\
th[s] &= (v02[m/s] - \sqrt{(v02[m/s])^2 - 2a[Sh1]}) / a & &= (B9 - \text{PIERWIASTEK}(B9^2 - 2 * B14 * J3)) / B14 \\
V2[m/s] &= -a[m/s^2] \cdot tu[s] + v02[m/s] & &= -B14 * K3 + B9 \\
V2[km/h] &= 3,6 V2[m/s] & &= 3,6 * L3
\end{aligned}$$

2. Wygenerowanie przez program wykresów zależności:

- położenia x_1 i x_2 obu samochodów od czasu (od chwili t_0 do chwili zatrzymania przy przeszkodzie);
- prędkości v_1 i v_2 obu samochodów od czasu (od chwili t_0 do chwili zatrzymania przy przeszkodzie);
- prędkości v_1 i v_2 obu samochodów od położenia (od położenia $x_1 = x_2 = x_0$ do położenia $x_1 = x_2 = s$).

Tabela danych do wykresów:

Tabela zawiera 20 pozycji.

Wyznaczenie odcinka czasowego:

$$\Delta t = (tr + th) / 19$$

	A
15	
16	Δt
17	0,166
18	

Wartości początkowe wprowadzone do pierwszego wiersza tabeli:

$$X1=0 \quad E6 \quad 0$$

$$V1=V01 \quad F6 = B3$$

$$t=0 \quad H6 \quad 0$$

$$X2=0 \quad I6 \quad 0$$

$$V2=V02 \quad J6 = B9$$

	D	E	F	G	H	I	J	K
4								
5		X1 [m]	V1 [m/s]	V1 [km/h]	t [s]	X2 [m]	V2 [m/s]	V2 [km/h]
6		0,0	8,3	30	0,000	0	11,1	40
7		1,4	8,3	30	0,166	1,8	11,1	40
8		2,8	8,3	30	0,333	3,7	11,1	40
9		4,2	8,3	30	0,499	5,5	11,1	40
10		5,5	8,3	30	0,666	7,4	11,1	40

16		13,9	8,3	30	1,664	18,5	11,1	40
17		15,3	8,3	30	1,831	20,3	11,1	40
18		16,6	8,3	30	1,997	21,9	0,0	0
19		17,9	7,8	28	2,163	21,9	0,0	0
20		19,1	6,5	24	2,330	21,9	0,0	0
21		20,1	5,2	19	2,496	21,9	0,0	0
22		20,9	3,9	14	2,663	21,9	0,0	0
23		21,4	2,6	9	2,829	21,9	0,0	0
24		21,7	1,3	5	2,995	21,9	0,0	0
25		21,8	0,0	0	3,162	21,9	0,0	0

Wzory wypełniające pozostałe wiersze tabeli:

$$x_{i+1} = \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{01}\Delta t + x_{1i}; -0,5a(\Delta t^2 + v_{01}\Delta t + x_i))$$

$$v_{i+1} = \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{1i}; a(t_i - \Delta t) + v_{01i})$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$x_{2i+1} = \text{jeżeli}(t_i < (t_r + t_u); \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{02}\Delta t + x_{2i}; -0,5a(\Delta t^2 + v_{2i}\Delta t + x_{2i})); s)$$

$$v_{2i+1} = \text{jeżeli}(t_i < (t_r + t_u); \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{2i}; -a(t_i - t_r) + v_{02}); 0)$$

Wykresy obrazujące przebieg zmian drogi i prędkości w czasie.



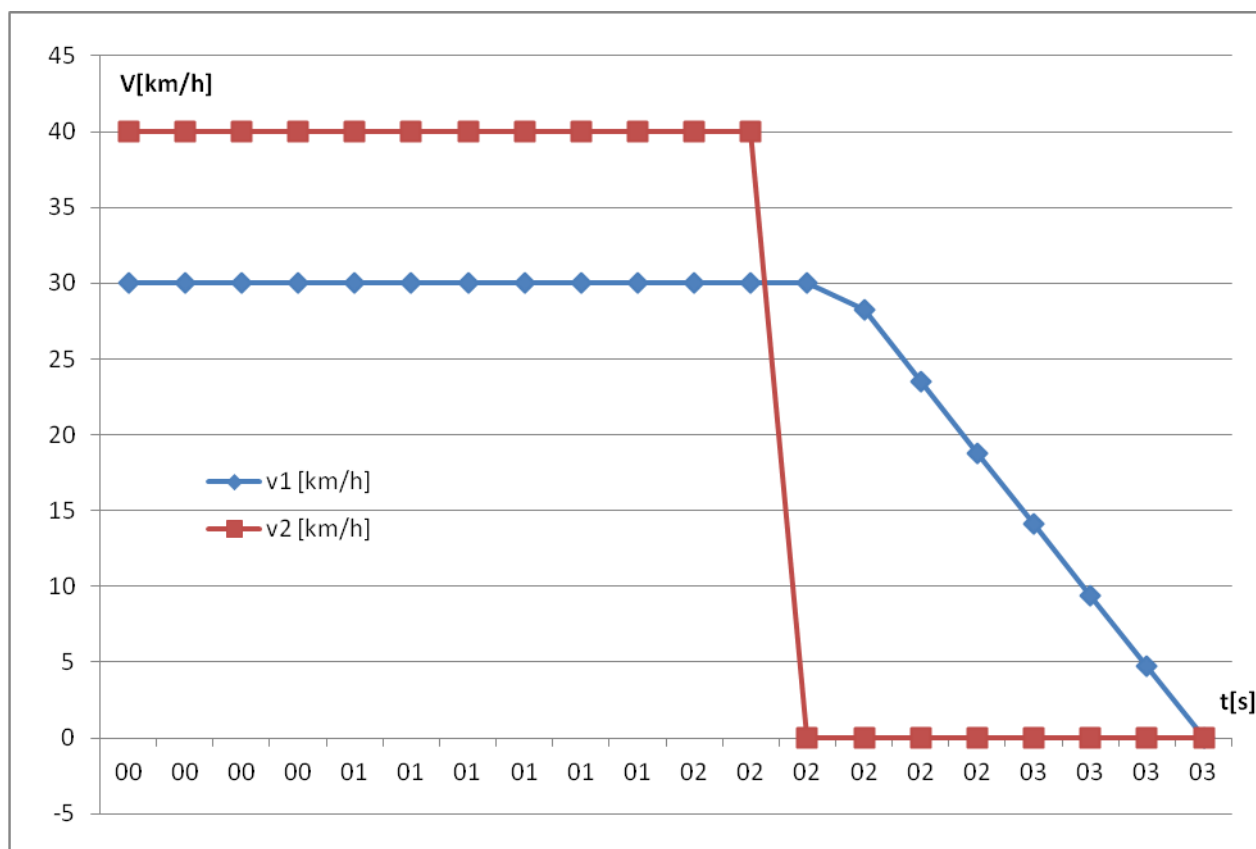
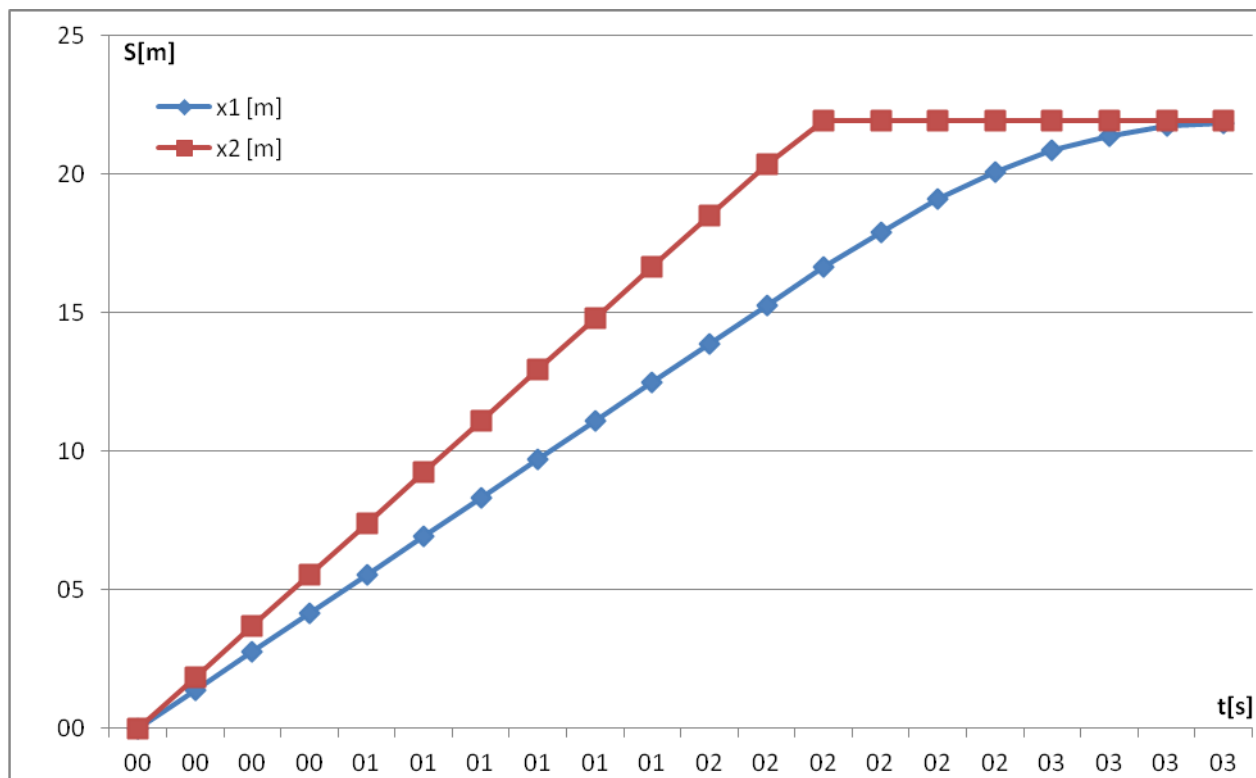
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



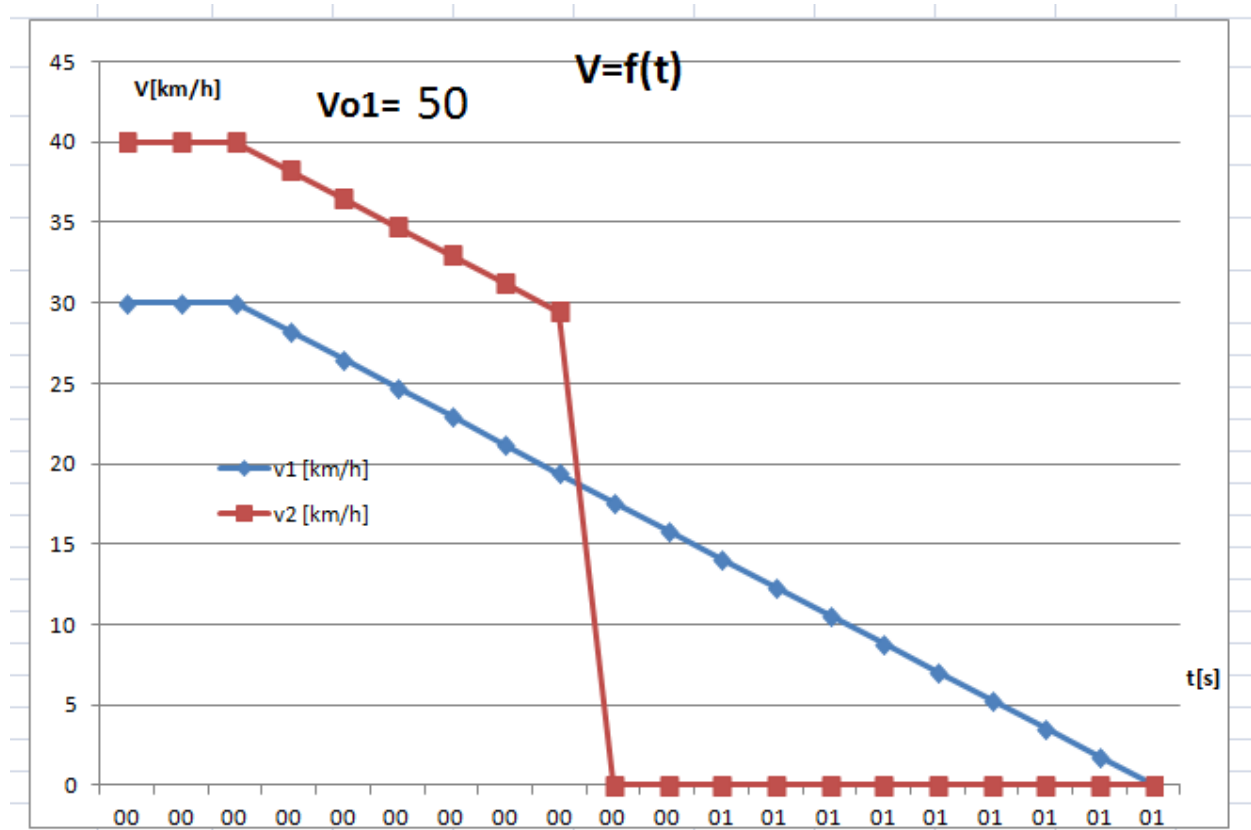
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

III. Interpretacja wyników

Wynik naszego doświadczenia, a właściwie symulacji zależy od czterech parametrów przez nas ustalonych (prędkość początkowa, czas reakcji, współczynnik tarcia, różnica prędkości). Współczynnik tarcia zależy od warunków panujących na jezdni, ale również od stanu ogumienia za które odpowiada kierowca. Czas reakcji zależy od stanu kierowcy, czy jest wypoczęty, czy zmęczony, od warunków atmosferycznych, od pory dnia i zapewne od kilku jeszcze czynników. Może on być bardzo krótki, rzędu ułamka sekundy, ale też może być bardzo długi ponad sekundę. W czasie reakcji kierowcy samochód porusza się po ustalonym wcześniej torze i z ustaloną wcześniej prędkością. Aby lepiej zauważyć wpływ poszczególnych parametrów na wynik, zmieniamy najpierw tylko jeden parametr, pozostałe zaś niech pozostaną ustalone.

P.1

Prędkość jednego samochodu ustalamy na 30 km/h, a drugiego na 40 km/h. Pozostałe parametry: współczynnik tarcia 1, a czas reakcji 0,1 s. Czyli mamy warunki bardzo korzystne. Dobra przyczepność opon do podłoża i bardzo krótki czas reakcji kierowcy. Popatrzmy na wykresy $v(t)$ i $s(t)$ dla obu samochodów.



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



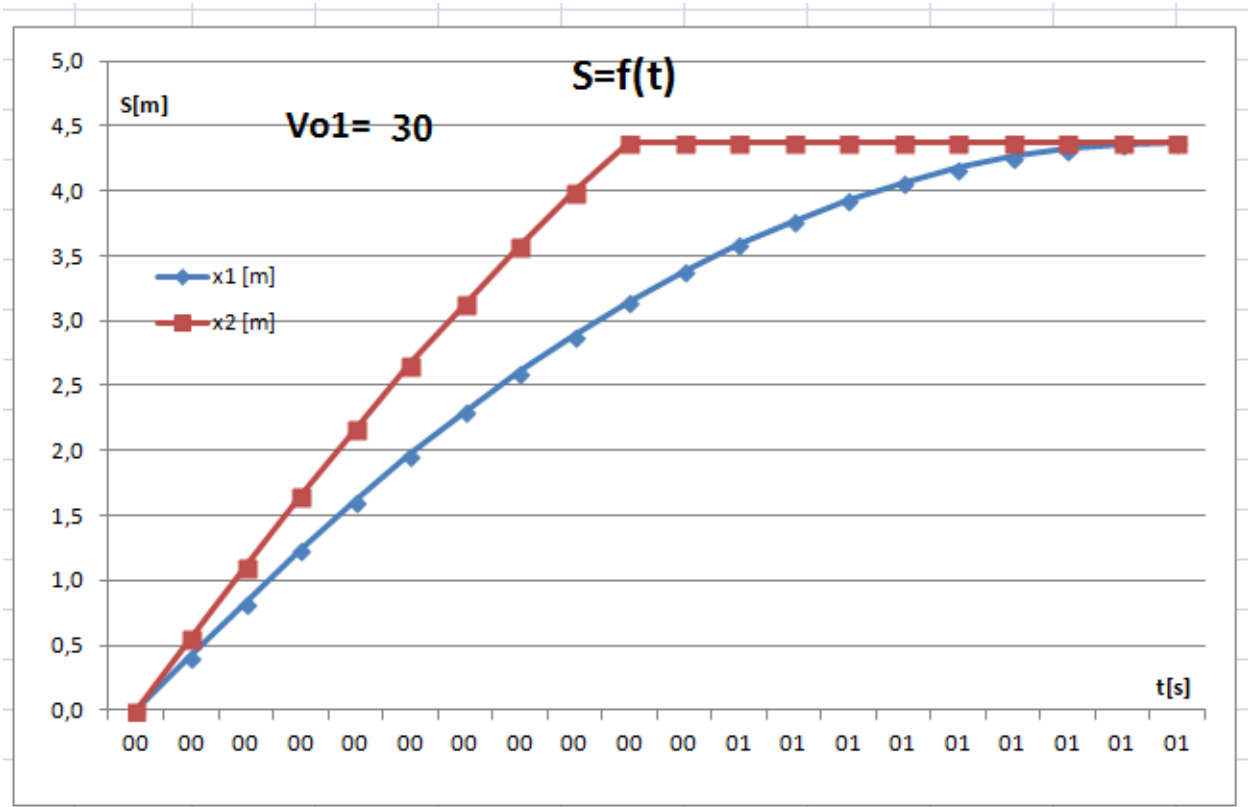
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czas reakcji ustaliliśmy na 0,1 s, czyli za kierownicą siedzi sprawny kierowca. W tym czasie samochody pokonują odpowiednio: 4 m i 5 m. Mało? Przejście dla pieszych ma podobną szerokość.

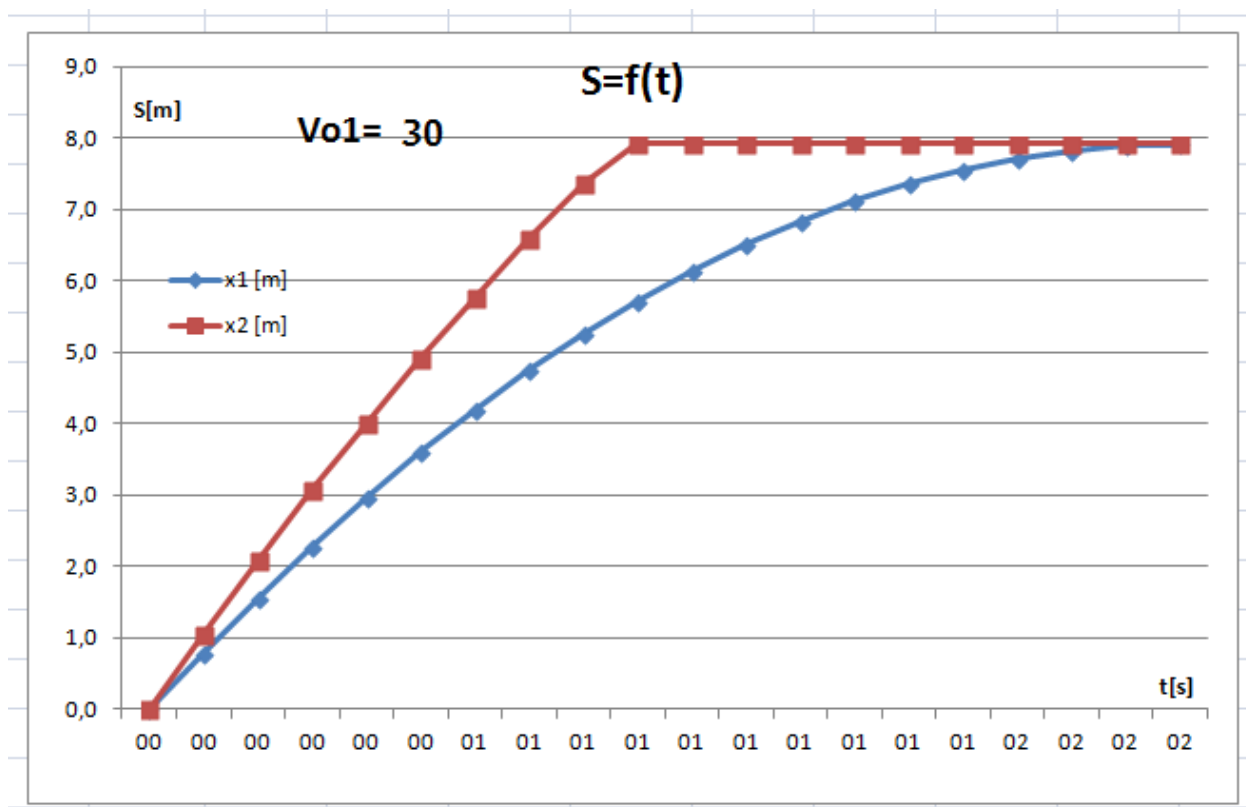
Samochód poruszający się z prędkością 40 km/h uderzył w przeszkodę z prędkością 30 km/h.



Oba samochody pokonują do przeszkody taką samą drogę. Z wykresu możemy odczytać, że jest to około 4,5 m. Samochód "1" zatrzymuje się dokładnie przed przeszkodą, natomiast samochód "2" nie wytracił prędkości w chwili dotarcia do przeszkody, zatem porusza się dalej.....co skutkuje zderzeniem z przeszkodą. Oba samochody jadą ze stosunkowo niewielką prędkością, jednak jeśli zauważymy, że masa samochodu to ponad 1000 kg, to zderzenie będzie zawsze dotkliwe dla kierowcy i dla przeszkody. A gdyby przeszkoda był pieszy na jezdni ?

P.2.

Zmniejszy współczynnik tarcia do 0,5, pozostałe parametry pozostawmy bez zmiany:



Widzimy, że tym razem droga hamowania wydłużyła się do 8,5 m, czyli niemal dwukrotnie. Mówiąc drogę hamowania mamy na myśli bezpieczną drogę hamowania dla samochodu jadącego z prędkością 30 km/h, który w naszym modelu zdąży wyhamować.



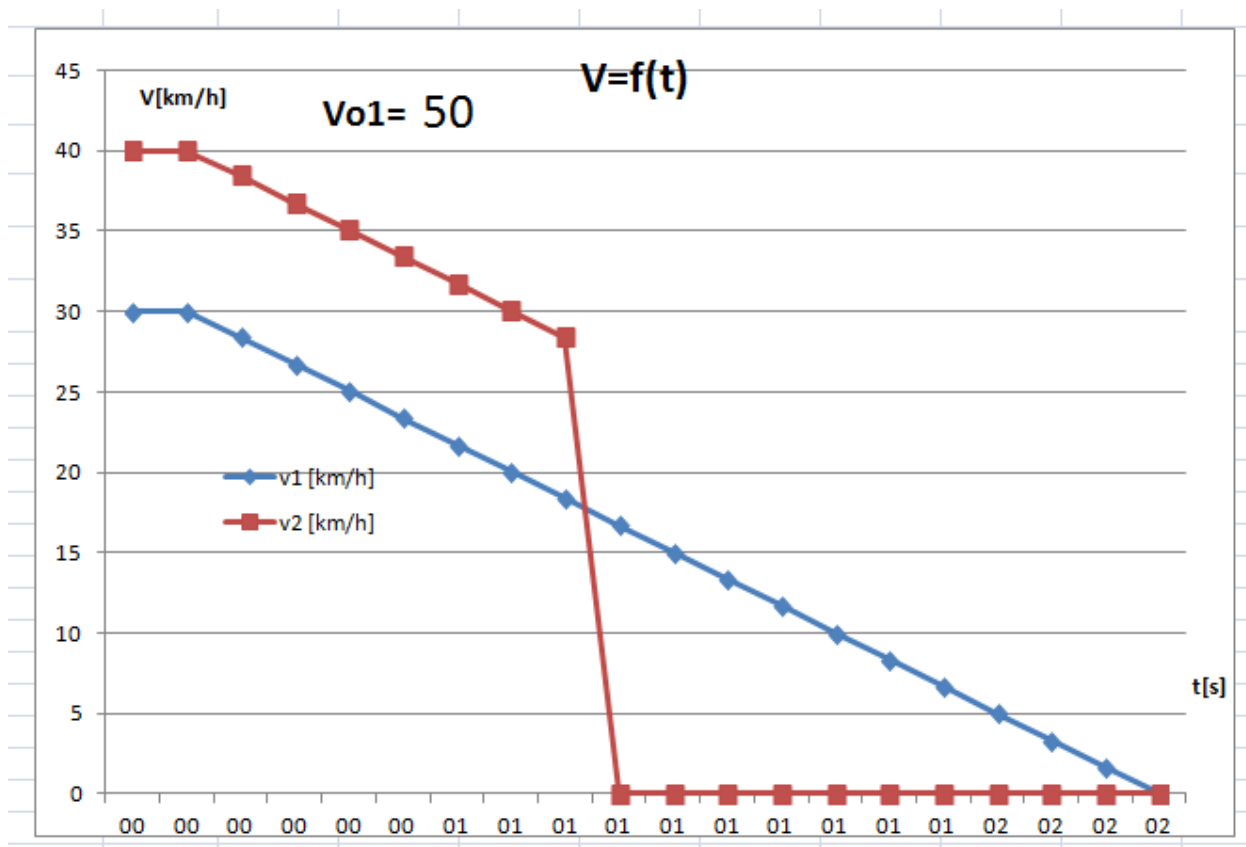
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



P3.

Ustalmy teraz czas reakcji 0,5 s, współczynnik tarcia 0,5. Warunki na drodze uległy pogorszeniu.



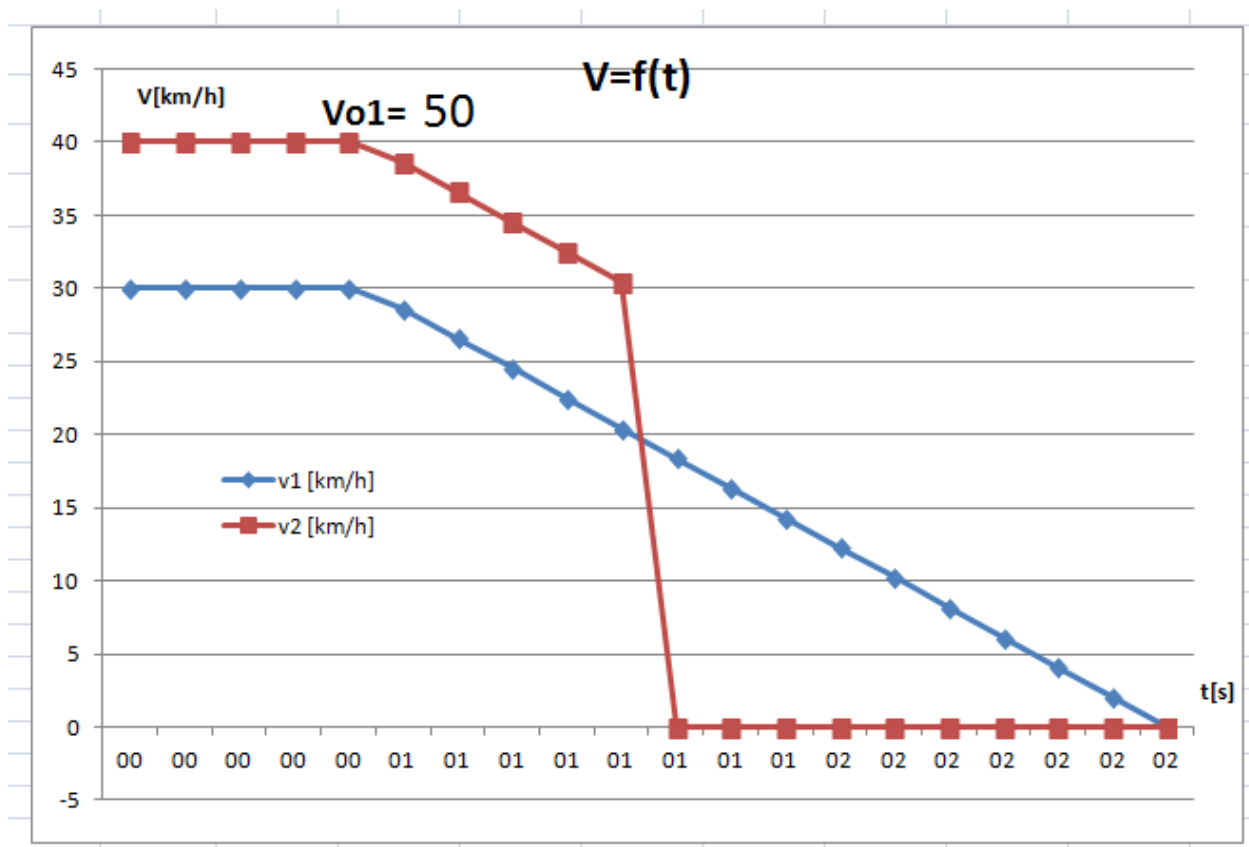
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



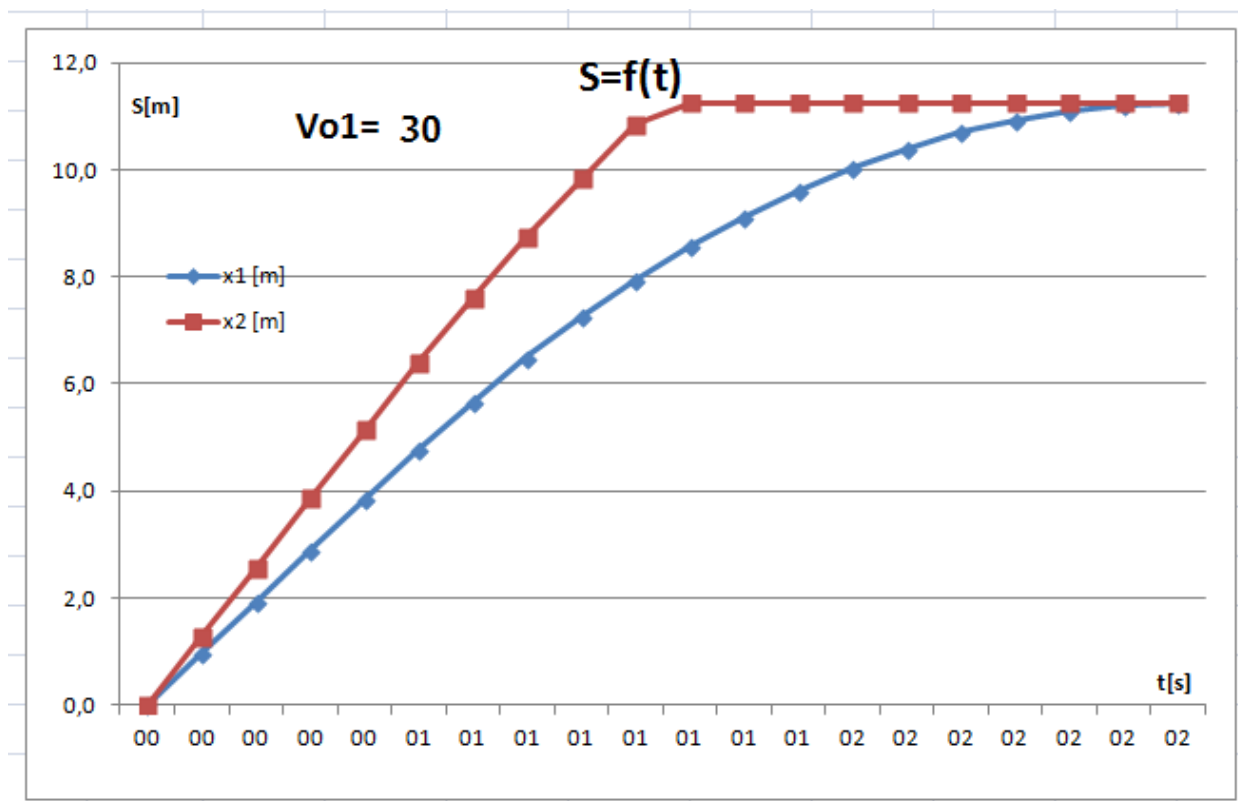
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



P.4.

Prędkości samochodów: 60 km/h i 70 km/h, współczynnik tarcia: 0,5, czas reakcji: 0,5 s.



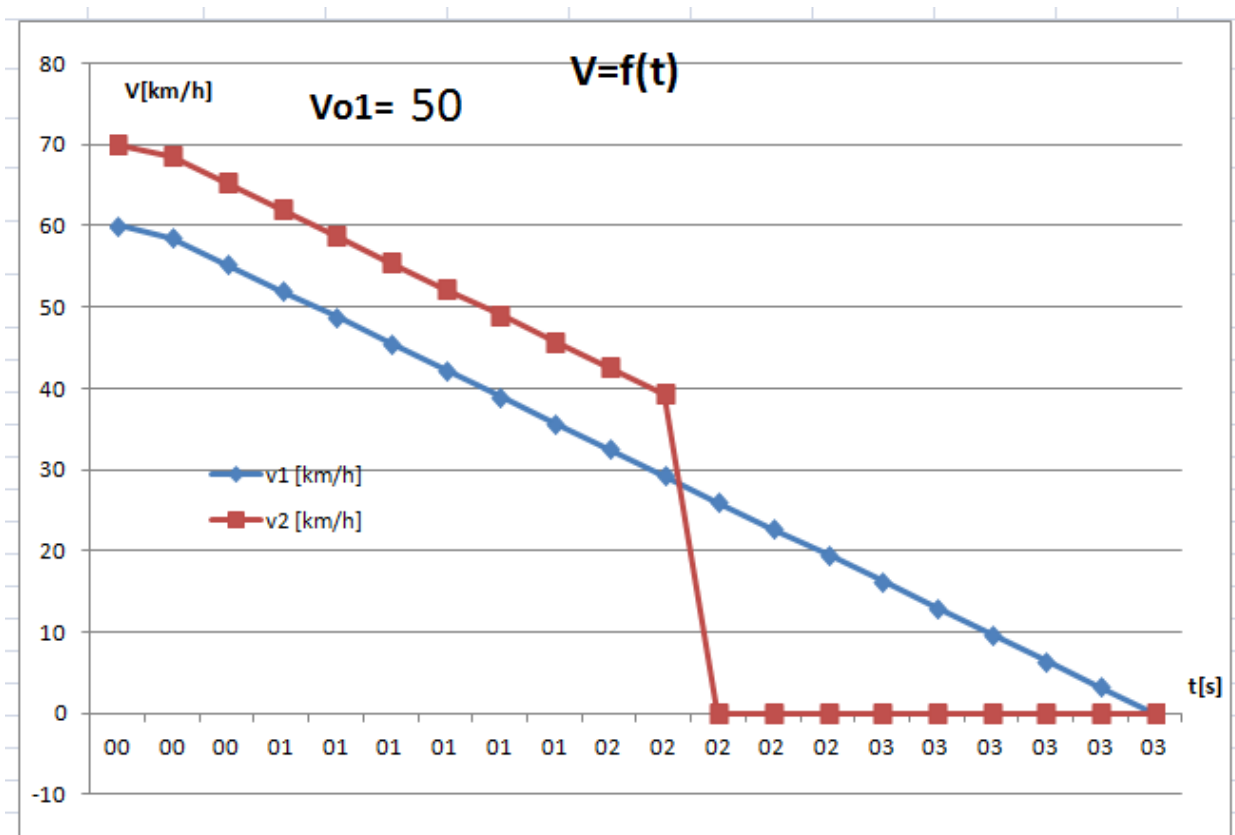
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Zauważmy, że w tym przypadku samochód uderza w przeszkodę z prędkością 40 km/h.



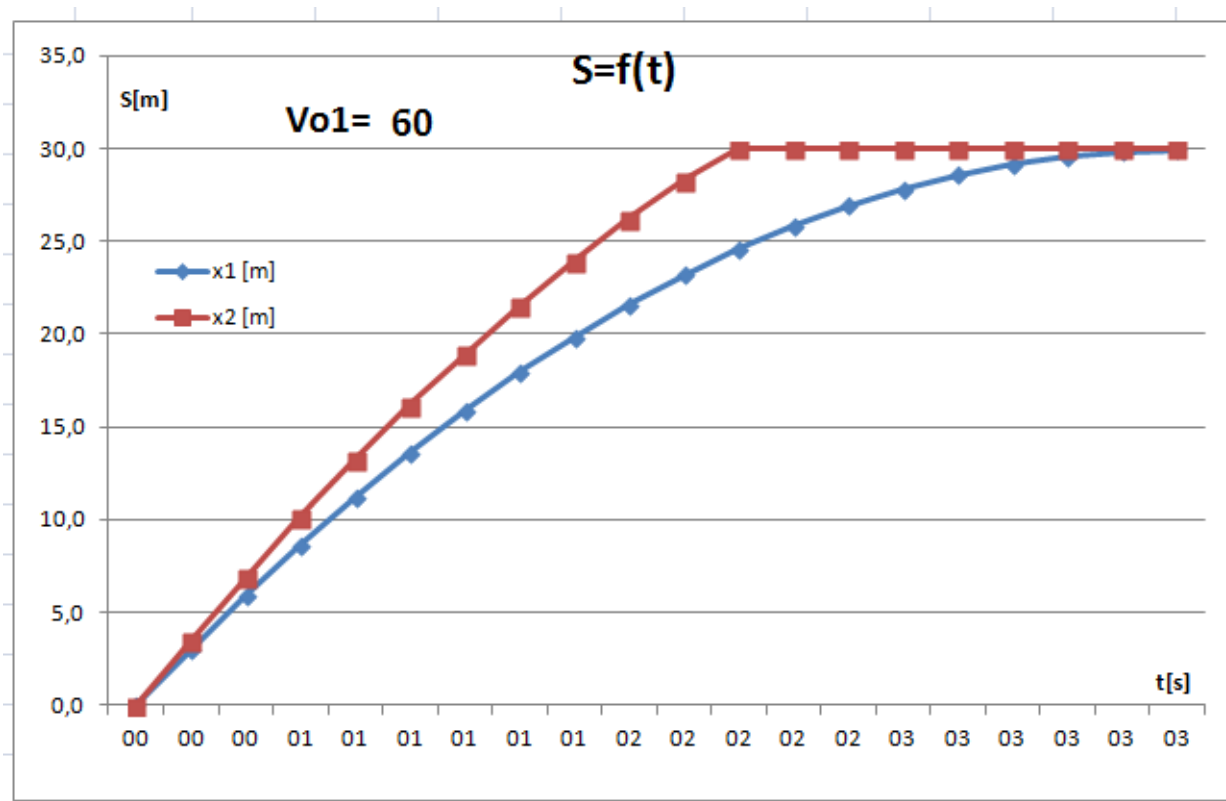
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Droga hamowania wyniosła dla samochodu jadącego z prędkością 60 km/h w tych warunkach, 30 m. Samochód jadący z prędkością o 10 km/h większą w chwili uderzenia miał prędkość 40 km/h, zatem, aby wyhamować, powinien rozpocząć hamowanie znacznie wcześniej.

P.5.

Rozpatrzmy jeszcze ekstremalny przypadek. $v_2=100$ km/h. Pozostałe parametry pozostawmy bez zmiany.



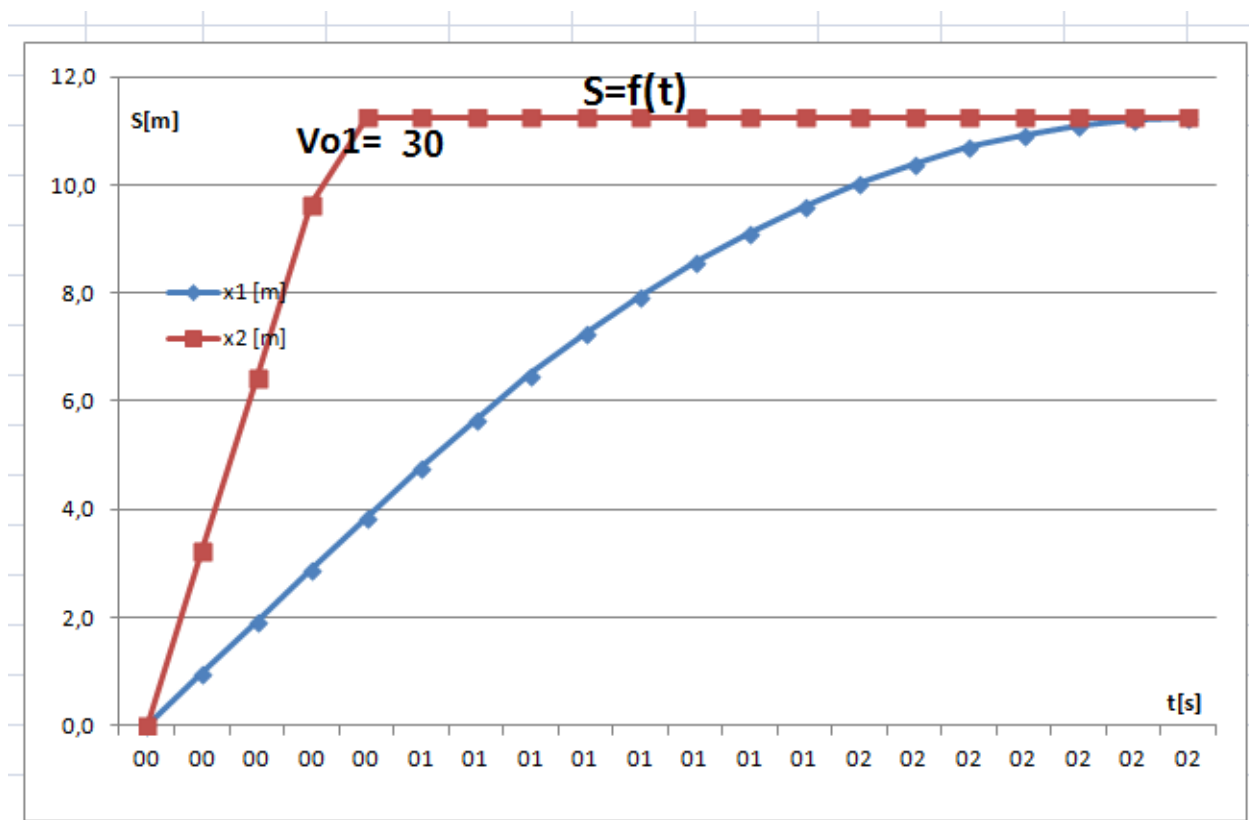
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



II. Do pracowni fizycznej.

Na bazie wyników działania programu przygotować kilka wykresów (przykłady podano niżej), obrazujących zmiany całkowitej drogi hamowania oraz rozmiar zagrożenia w przypadku kolizji, związane z czynnikami zależnymi od woli kierowcy. Można przy tym podzielić cztery parametry programu na dwie kategorie.

- v_{01} i μ to czynniki niezależne bezpośrednio od woli kierowcy; wynikają one z określonej sytuacji drogowej (np. ograniczenia prędkości, warunków pogodowych) lub technicznej (np. stanu opon). Oczywiście kierowca winien uwzględniać te czynniki podczas prowadzenia samochodu.
- Δv i t_r to czynniki zależne niemal bezpośrednio od woli kierowcy.

Takie wykresy, można przedstawić, przykładowo, w formie plakatu na szkolnej wystawie poświęconej bezpieczeństwu na drodze.

1. Przedstawić w formie wykresu wpływ wartości Δv na całkowitą drogę hamowania s oraz końcową prędkość v_2 przy różnych zestawach v_{01} i μ (np. na autostradzie przy dobrej pogodzie,

co może odpowiadać $v_{01} = 140 \text{ km/h}$ i $\mu = 0,9$ czy w obszarze zabudowanym w deszczu, co może odpowiadać $v_{01} = 50 \text{ km/h}$ i $\mu = 0,5$).

2. Przedstawić w formie wykresu wpływ wartości t_r na całkowitą drogę hamowania s oraz końcową prędkość v_2 przy różnych zestawach v_{01} i μ , odpowiadającym określonym sytuacjom drogowym.
3. Przedstawić wyniki powyższych zależności na wykresach "trójwymiarowych". Dziedziną takiego wykresu jest iloczyn kartezjański zbiorów wartości Δv i t_r (tworzy on płaszczyznę, będącą podstawą takiego wykresu), zaś wartość (s lub v_2) jest odkładana w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny.